CONSTRUÇÃO DE GRÁFICOS DE FUNÇÕES POLINOMIAIS UTILIZANDO O SOFTWARE GEOGEBRA

Platão Gonçalves Terra Neto, PPGEMat/UFRGS, plataoterra@gmail.com

Resumo. Polinômios, em uma variável, são alvos de estudos de pesquisadores em Matemática e fazem parte dos Planos de Ensino da Educação no Brasil. De maneira oportuna, representá-los, como gráficos de Funções Polinomiais, é uma possibilidade concreta no terceiro ano do ensino Médio. Aqui, adapta-se uma sequência didática sobre construção de polinômios para o GeoGebra em uma Escola de Ensino Médio Técnico Integrado, na cidade de Novo Hamburgo, com três turmas, como meio de verificar as potencialidades do uso do software para que os educando analisem um polinômio e sua respectiva representação gráfica. Para tanto, utiliza-se a sequência de Dazzi e prepara-se um ambiente de investigação matemática no Laboratório de Informática da Escola e analisam-se os resultados obtidos pelos educandos.

Palavras-chave: Polinômios, Gráficos polinomiais, GeoGebra.

CONSTRUCTION OF POLYNOMIAL FUNCTION GRAPHS USING GEOGEBRA SOFTWARE

Abstract. Polynomials, in one variable, are targets of researchers' studies in mathematics and are part of the Education Teaching Plans in Brazil. In a timely way, to represent them as graphs of polynomial functions is a real possibility in the last year of High School. Here, a didactic sequence is adapted regarding the construction of polynomials for GeoGebra at a Integrated Technical High School in Novo Hamburgo with three classes. This way, the potential uses of the software can be verified so that the students could analyze a polynomial and its graphic representation. For this end, the Dazzi sequence is used and a mathematical investigation environment is prepared in the Computer Laboratory of the School and the results obtained by students are analyzed.

Keywords: Polynomials, Polynomials Graphs, GeoGebra.

1. Introdução

A vastidão de elementos distintos dentro da Matemática sempre foi notória. O trabalho feito em Educação Básica abrange questões Geométricas, Algébricas e Lógicas o tempo todo e a todo o momento. Um exemplo notável da variedade de objetos matemáticos estudados é apresentada anualmente no atual Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) que contempla uma ampla variedade de conceitos e formulações matemáticas.

Dentro do conhecimento matemático, uma área que sempre instigou e demandou muito, em termos de investigação em Matemática, foi o de polinômios. De fato, conforme Lisboa (2007, p. 2), “No decorrer da história vários problemas envolvendo polinômios (equações polinomiais) instigaram a curiosidade de grandes matemáticos como Nicoló Fontana (Tartáglia), Ludovico Ferrari, Isaac Newton dentre muitos outros.”.

O ensino de Polinômios, dentro do Componente Curricular Matemática, é geralmente previsto dentro dos planos de estudos de Oitavo Ano de Ensino Fundamental e Terceiro Ano de Ensino Médio. No Ensino Fundamental, trabalha-se com as ideias polinomiais mais genéricas e com polinômios em mais de uma variável. No Ensino Médio, o trabalho é voltado para polinômios em uma variável e o trabalho é mais minucioso, chegando, inclusive, ao estudo de equações polinomiais.

De maneira bem geral, pode-se dizer que um polinômio P(x) de variável real é da forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

onde $a_n \neq 0$ é denominado de coeficiente dominante e que o grau de P(x) é n.

Neste artigo, é trabalhado com o caso especial em que $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ são reais.

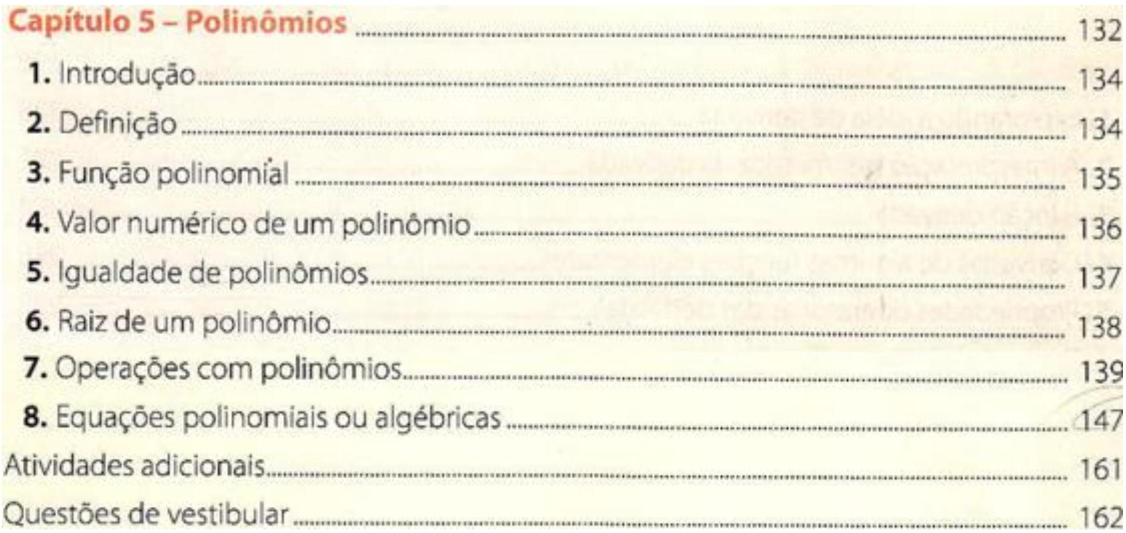
Uma equação polinomial é da forma P(x) = 0 e o conjunto solução da equação polinomial é o conjunto de valores $S=\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ tais que $P(x_i)=0$, com $0 < i < k + 1$ e

$k < n + 1$.

É conhecido do Teorema Fundamental da Álgebra que um polinômio P(x) com grau n tem n raízes. Oliveira (2015) demonstra-o de maneira minuciosa, de modo que não nos interessa tal demonstração neste artigo.

Apesar da variedade de possibilidades no trabalho com polinômios, o que é realizado no Terceiro Ano do Ensino Médio fica restrito aos tópicos presentes no livro didático. Pensando na prática docente adotada na Escola de Ensino Médio Integrado ao Técnico, na cidade de Novo Hamburgo, onde trabalha o Pesquisador, verificou-se que o estudo de polinômios restringe-se ao que sugere o livro de Dante (2007), conforme figura 1.

Figura 1 – Índice do Livro Matemática



Capítulo 5 – Polinômios 132
1. Introdução 134
2. Definição 134
3. Função polinomial 135
4. Valor numérico de um polinômio 136
5. Igualdade de polinômios 137
6. Raiz de um polinômio 138
7. Operações com polinômios 139
8. Equações polinomiais ou algébricas 147

Atividades adicionais 161
Questões de vestibular 162

Fonte: Dante (2007, p.5).

Considerando- se a variedade aplicações polinomiais em questões matemáticas e considerando que a sequência didática do livro não contempla a representação geométrica de um polinômio, foram pesquisadas possibilidades de trabalho, com utilização de Tecnologias Digitais, como um meio de propor uma investigação matemática que relacionasse Polinômios e suas representações gráficas no plano cartesiano.

Para tanto, revisando bibliografias sobre o tema, usou-se como referência o trabalho de dissertação de Dazzi, (2011) que se utiliza do Software Graphmatica para analisar gráficos de polinômios com grau maior que dois. Sem sombra de dúvida, pode-se afirmar que esta investigação poderia ocorrer sem a interferência de um software, mas como bem relata Dazzi (2011, p.23-24),

> "Cumpre então observarmos que o uso do computador é imprescindível na sociedade do conhecimento e que a inserção de novas mídias no processo de ensino-aprendizagem não tornará obsoletas as mídias mais tradicionais nem os métodos de ensino mais tradicionais. É necessário, como já referimos, avaliar o que queremos enfatizar no Ensino da Matemática e qual a mídia mais adequada para atender aos nossos propósitos."

Baseado ainda no produto da dissertação de Dazzi, adaptou-se para as necessidades específicas do trabalho. A questão que norteou esta pesquisa é: **"Como realizar uma investigação matemática sobre construção de gráficos polinomiais utilizando o software GeoGebra?"**. As questões adicionais são: **"Como adaptar uma sequência didática sobre construção de gráficos polinomiais a três turmas de Terceiro Ano de Ensino Médio Técnico Integrado"** e **"Quais são as vantagens do Software GeoGebra que possibilitam uma melhor compreensão da representação dos gráficos de polinômios em relação a não-utilização de software algum?"**

Os objetivos desta pesquisa são, portanto:

- Possibilitar ao educando um ambiente de investigação matemática, utilizando o Software GeoGebra no lugar dos tradicionais lápis e régua.

- Adaptar, para três turmas de Ensino Médio Técnico Integrado, na cidade de Novo Hamburgo, uma proposta de construção de gráficos polinomiais como meio de facilitar sua representação.

O tema do artigo é, portanto, o uso do Software GeoGebra para uma Investigação Matemática com o conteúdo e polinômios e suas representações gráficas.

O trabalho já citado, com todas as suas particularidades, aproveita também toda a bagagem adquirida pelos alunos durante todo o seu Ensino Básico e, de maneira mais atual, de seu conhecimento prévio e teórico de Polinômios. Já o estudo dos Gráficos de Polinômios foi tratado logo após todo o estudo algébrico (e necessário) dos polinômios.

Pensando na utilização de conceitos já adquiridos, montou-se uma sequência didática, utilizando-se o conceito de investigação matemática que, partido do conhecimento já adquirido pelo educando, prevê novas aprendizagens. O trabalho, baseado no conhecido, é fortemente indicando por Ponte (2005, p. 23), quando afirma que: "[...] o envolvimento ativo do aluno é uma condição fundamental da aprendizagem. O aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo. Esse é, precisamente, um dos aspectos fortes das investigações.".

Não apenas por considerar o uso de tecnologias como um facilitador, mas também por mostrar a tecnologia como um meio efetivo de aprendizagem em matemática, a proposta de sequência pedagógica e todo o seu desenrolar incentivam ainda mais a pesquisa por novas possibilidades de uso e suas eventuais adaptações para o Ensino Básico. Justifica-se, portanto, não apenas pela sua utilização, mas também pelas possibilidades de aprendizado que adiciona ao fazer pedagógico.

2 Materiais e Métodos

Tendo o trabalho de Dazzi como referência, foi analisado o que os alunos já tinham em sua bagagem polinomial e realizadas adaptações para um melhora no andamento da sequência didática.

Tendo o conteúdo de polinômios concluído e tendo já formulado os conceitos de limites infinitos, selecionou-se e adaptou-se oito atividades propostas no trabalho referido. O texto também passou por um refinamento, de maneira a tornar a linguagem escrita mais matemática, utilizando símbolos próprios de Matemática, como "lim P(x)" e os símbolos de + ∞ e - ∞.

Esta sequência didática foi entregue impressa aos alunos e deveria ser completada a mão. Após a conclusão das atividades, os alunos devolveram o trabalho e, com os dados em mão, analisaram-se os resultados como meio de responder à questão da pesquisa.

De maneira a introduzir o software GeoGebra, trabalhou-se com construção de três polinômios simples (de grau 1, 2 e 3), no papel quadriculado, e, por fim, no software. Foi mostrado, neste momento, como inserir os comandos gráficos no Geogebra.

Têm-se aqui imagens das oito atividades propostas e seus respectivos objetivos, conforme mostra a tabela 1.

Tabela 1 – Atividades 1 e 2

<table>
<tr>
<td>
<u>Atividade 1:</u>

Construa, num mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções polinomiais dadas:
a) $f(x) = x^2 – 3x + 2$
b) $f(x) = - x^2 + 5x – 6$
c) $f(x) = 6x^4 – 10x^3 – 5x^2 + 8x – 1$
d) $f(x) = x^4 – 5x^3 + 12x^2 – 8x$
e) $f(x) = – x^4 – x^3 + 6x^2 + x – 8$

1) O grau das funções é par ou ímpar?

2) Analisando o gráfico, determine $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ para cada uma das funções.

<table>
<tr><th></th><th>$\lim_{x\to+\infty} f(x)$</th><th>$\lim_{x\to-\infty} f(x)$</th></tr>
<tr><td>a)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td></td><td></td></tr>
</table>
3) Baseado nos resultados da parte 2), como se pode verificar se uma função polinomial tem grau par?
</td>
<td>
<u>Atividade 2</u>

Construa, num mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções polinomiais dadas:
a) $f(x) = 3x – 6$
b) $f(x) = - x + 5$
c) $f(x) = 2x^3 – x^2 – 8x + 9$
d) $f(x) = - x^3 + 7x^2 – 8x + 6$
e) $f(x) = x^5 – 4x^3 + 3x$

1) O grau das funções é par ou ímpar?

2) Analisando o gráfico, determine $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ para cada uma das funções.

<table>
<tr><th></th><th>$\lim_{x\to+\infty} f(x)$</th><th>$\lim_{x\to-\infty} f(x)$</th></tr>
<tr><td>a)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td></td><td></td></tr>
</table>
3) Baseado nos resultados da parte 2), como se pode verificar se uma função polinomial tem grau ímpar?
</td>
</tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelo autor (2015), adaptado de Dazzi (2011).

O objetivo destas duas atividades (1 e 2) era verificar se, construindo os gráficos das referidas funções no GeoGebra, estabelecia-se uma relação entre os limites infinitos:

Quando o grau é par, o limite infinito é igual (ambos + ∞ ou ambos - ∞). Quando o grau é impar, os limites são diferentes (um + ∞ e o outro - ∞).

Como os alunos já tinham conhecimento dos limites infinitos, a notação ficou mais precisa do que o proposto por Dazzi (2011), conforme mostra a tabela 2.

Tabela 2 – Atividades 3 e 4

<table>
<tr>
<td>
<u>Atividade 3</u>

Construa, num mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções polinomiais dadas:
a) $f(x) = 2x – 4$
b) $f(x) = x^2 – 5x + 4$
c) $f(x) = x^3 – 8x^2 + 19x – 12$
d) $f(x) = x^4 + x^3 – 7x^2 – x + 6$
e) $f(x) = x^5 + 2x^4 – 2x^3 + 2x^2 – 3x$

1) a_n é positivo ou negativo?

2) Analisando o gráfico, determine $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ para cada uma das funções.

<table>
<tr><td></td><td>$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$</td></tr>
<tr><td>a)</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td></td></tr>
</table>
3) Baseado nos resultados da parte 2), como se pode verificar se a_n é positivo?
</td>
<td>
<u>Atividade 4</u>

Construa, num mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções polinomiais dadas:
a) $f(x) = – x + 5$
b) $f(x) = – x^2 +5x – 4$
c) $f(x) = – 3x^3 + 9x^2 – 8x + 7$
d) $f(X) = –x^5 + 5x^3 + 8x^2 – 12x – 5$
e) $f(x) = - x^4 – x^3 + 4x^2 + x – 8$

1) a_n é positivo ou negativo?

2) Analisando o gráfico, determine $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ para cada uma das funções.

<table>
<tr><td></td><td>$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$</td></tr>
<tr><td>a)</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td></td></tr>
</table>
3) Baseado nos resultados da parte 2), como se pode verificar se a_n é negativo?
</td>
</tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelo autor (2015), adaptado de Dazzi (2011).

O objetivo destas duas atividades (3 e 4) era o de verificar que o sinal de a_n determina limP(x) quando $x\to+\infty$. Se $a_n>0$, $P(x) \to+\infty$ quando $x\to+\infty$ e, se $a_n<0$, $P(x) \to-\infty$ quando $x\to+\infty$. Neste caso, também, o estudo anterior de limites infinitos possibilitou uma notação matemática mais precisa que a proposta de Dazzi (2011), conforme tabela 3.

Tabela 3 – Atividade 5

<u>Atividade 5</u>

Construa, num mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções polinomiais dadas:
a) $f(x) = x + 2$
b) $f(x) = x^2 – 3x + 2$
c) $f(x) = – x^2 + 4x – 3$
d) $f(x) = 2x^3 + x^2 – 6x – 3$
e) $f(x) = - 3x^3 + 6x^2 + x – 2$
f) $f(x)= – x^4 + 19x^2 – 30x$

1) Qual é o ponto de intersecção da função com o eixo das ordenadas?

2) Sem construir o gráfico, como se pode identificar onde o gráfico intercepta o eixo das ordenadas?

Fonte: Elaborado pelo autor (2015), adaptado Dazzi (2011).

O objetivo da atividade 5 era o de verificar que a intersecção, entre o gráfico do polinômio e o eixo das ordenadas, coincide com o termo independente a_0. Este fato é de conhecimento geral e está previsto quando as bibliografias tratam sobre o valor numérico quando x = 0. A tabela 4 explicita o assunto.

Tabela 4 – Atividades 6, 7 e 8

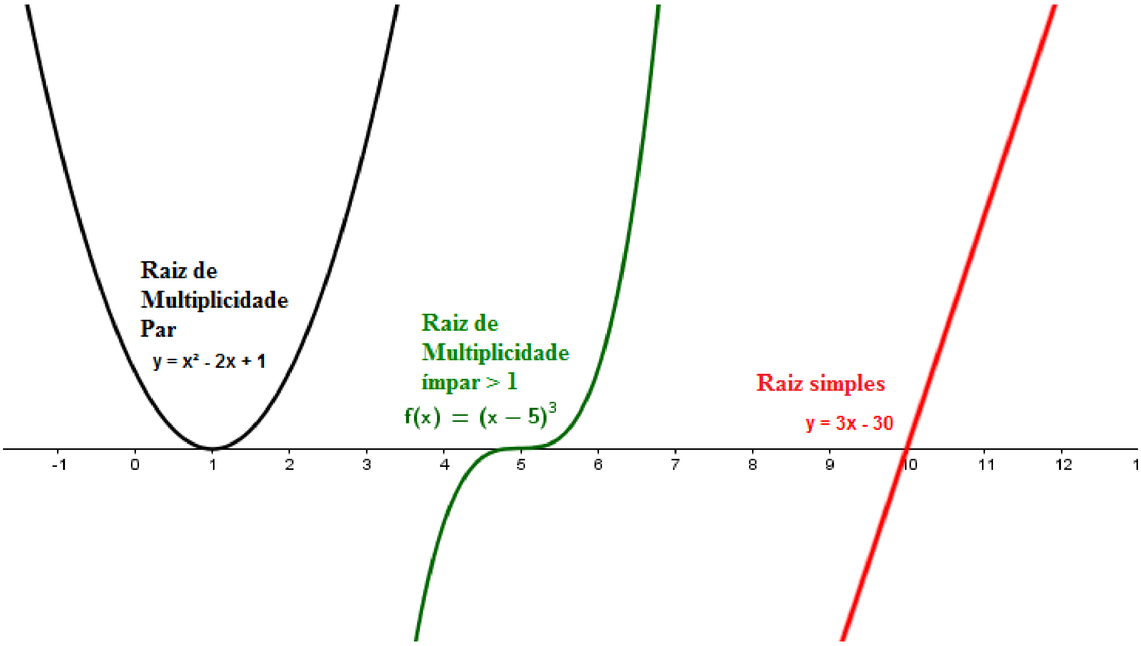
Atividade 6	Atividade 7	Atividade 8
Construa num mesmo plano cartesiano os gráficos das funções polinomiais dadas: a) $f(x) = 2x + 4$ b) $f(x) = - x – 3$ c) $f(x) = x^2 – x – 6$ d) $f(x) = x^3- 4x^2 + 3x$ e) $f(x) = x^3 – 3x^2 – x + 3$ f) $f(x) = x^4 + x^3 – 7x^2 – x + 6$ g) $f(x) = – x^5 + 5x^3 – 4x$ 1) Identifique os pontos onde cada gráfico intercepta o eixo das abscissas. 2) Determine o grau de cada uma das funções 3) Determine as raízes reais de cada função. Quantas raízes reais distintas cada função tem? 4) Estas raízes são simples? Como isto é identificado no gráfico?	Construa num mesmo plano cartesiano os gráficos das funções polinomiais dadas: a) $f(x) = x^2 – 4x + 4$ b) $f(x) = - x^2 + 6x – 9$ c) $f(x) = x^3 – 8x^2 + 21x – 18$ d) $f(x)=–x^4+10x^3–32x^2+38x–15$ e) $f(x) = x^4 – 3x^3 – 7x^2+ 15x+ 18$ f) $f(x) = x^4 -8x^3 +24x^2 -32x + 16$ g) $f(x) =x^5+2x^4 –2x^3–8x^2 –7x - 2$ 1) Nas proximidades das suas raízes reais, considere o aspecto do gráfico de cada função. Estes gráficos cortam o eixo das abscissas? 2) Escreva o grau de cada uma das funções 3) Determine as raízes reais de cada função. 4) Existem raízes múltiplas? 5) A multiplicidade delas é par ou ímpar? 6) Como você identifica no gráfico que a raiz tem multiplicidade par?	Construa num mesmo plano cartesiano os gráficos das funções polinomiais dadas: a) $f(x) = x^4 – x^3 – 3x^2 + 5x – 2$ b) $f(x) = – x^4+7x^3 – 18x^2+20x – 8$ c) $f(x) = x^4 – 5x^3 + 6x^2 + 4x – 8$ d) $f(x) = x^3 – 6x^2 + 12x – 8$ e) $f(x) = – x^5 – 5x^4 – 6x^3 + 2x^2 + 7x + 3$ f) $f(x)= x^5 - 19x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32$ 1) Nas proximidades das suas raízes reais, considere o aspecto do gráfico de cada função. Estes gráficos cortam o eixo das abscissas? 2) Escreva o grau de cada uma das funções. 3) Determine as raízes reais de cada função. 4) Existem raízes múltiplas? 5) A multiplicidade delas é par ou ímpar? 6) Como você identifica no gráfico que a raiz tem multiplicidade ímpar?

Fonte: Dazzi (2011, p.102 e 103).

O objetivo destas três atividades (6, 7 e 8) era o de analisar o aspecto do gráfico quanto à multiplicidade de suas raízes. Se a raiz for simples, o corte é simples no eixo x quando ocorrer a raiz. Se for de raiz de multiplicidade par, o gráfico apenas tangencia o eixo x na raiz. Se a raiz for de multiplicidade ímpar, maior do que um (não simples), o gráfico corta o eixo x, mas o comportamento é muito semelhante ao de tangencia. Aqui, os polinômios das atividades 7 e 8, de Dazzi, não foram alteradas, pois eles facilitavam a verificação do esperado em valores mais próximos ao eixo das abscissas.

A figura 2, na próxima página, construída no GeoGebra, ilustra o relatado como objetivo das atividades 6, 7 e 8.

Figura 2 – Multiplicidade de uma raiz



Fonte: Elaborado pelo autor (2015).

Anteriormente ao momento da aplicação desta sequência, estabeleceram-se algumas hipóteses como meio de analisar os objetivos e responder à questão norteadora deste artigo:

Hipótese 1: O software GeoGebra, mesmo desconhecido dos educando, é de fácil manipulação para a construção de gráficos Polinomiais?

Hipótese 2: A construção de gráficos Polinomiais, no GeoGebra, é mais rápida que o gráfico tradicional em papel?

Hipótese 3: Os educandos conseguem, partindo do que já conhecem de limites, polinômios e representações no plano cartesiano, responder todas as questões propostas, investigando a construção dos gráficos no software Geogebra?

Hipótese 4: Os educandos conseguem concluir o esperado das atividades propostas na sequência didática, relacionando o gráfico a sua representação algébrica?

Tendo a sequência elaborada e as hipóteses formuladas, a sequência foi aplicada nas turmas anteriormente citadas, em um intervalo de tempo de três períodos, de 50 min., em cada turma, no Laboratório de Informática da Escola. Tendo em mãos as sequências já respondidas pelos alunos, foi analisado o resultado obtido, como meio de responder à questão norteadora, validar as hipóteses e atingir os objetivos.

3 Resultados e Discussão

Levando em consideração as quatro hipóteses, pode-se dizer que a Hipótse 1 é válida, pois os educandos não relataram dificuldade em momento algum de manipulação do software para a construção dos gráficos de funções polinomiais. Dois alunos, porém, relataram conhecer outros softwares para construção de gráficos de polinômios: Winplot e Wolphran Alpha (online). De qualquer forma, ambos utilizaram o GeoGebra e relataram ser mais intuitivo de utilizar e com mais recursos que os dois citados.

Para verificar a hipótese 2, primeiro fez-se 3 gráficos em papel (grau 1, 2 e 3) e logo após outros três, de mesmo grau no software. O tempo gasto com os gráficos no papel foi maior nas três turmas, sem exceção.

Para a Hipótese 3, verificou-se que a dependência dos alunos do professor, como um explicador, ainda manteve-se. Logo no início das atividades foi sugerido aos alunos que, utilizando os conhecimentos prévios de polinômios e limites, completassem as atividades propostas. As atividades 1 e 2 foram mais demoradas de ser respondidas, pois em todas as turmas, alguns alunos preenchiam a tabela e vinham questionar o professor se o que haviam feito estava correto. Com as duas atividades, verificavam a mesma coisa, mas para paridades diferentes o questionamento sobre a correção manteve-se.

Logo após estas duas atividades, porém, os alunos já trabalhavam de maneira autônoma. As outras seis atividades correram de maneira muito rápida e, ao final dos três períodos, 92% dos alunos haviam concluído as atividades com interferência do professor em menos do que três atividades. A hipótese 3 não foi, portanto, totalmente validada, pois alguns educandos ainda dependiam do conhecimento do professor para dar prosseguimento nas atividades. É possível que, quanto mais forem expostos a ambientes de investigação matemática, a Hipótese 3 possa ser plenamente validada.

Para se tomar a Hipótese 4, precisa-se analisar as atividades e seus objetivos específicos. As atividades 1 e 2, como já relatado, não foram autonomamente resolvidas por alguns alunos. Desconsiderando-se este fato, porém, o índice de acertos e de conclusões corretas foi de 75% e 79% nas atividades 1 e 2, respectivamente. Este, definitivamente, é um índice superior à média padrão de 50%.

Considerando-se também que esta foi a atividade que abriu os trabalho, é válido também destacar duas respostas de alunos com resultados distintos.

Uma das respostas corretas para a atividade 2 estava corretamente indicada prevendo que: “Se o grau de P é ímpar, então, o polinômio começa em $+\infty$ e termina em $-\infty$, e vice-versa” (Aluno S, transcrição).

Viu-se, aqui, a não utilização da linguagem correta, mas o entendimento dos conceitos. O correto seria escrever que limP quando $x\rightarrow+\infty$ alterna entre $+\infty$ e $-\infty$. A falta desta escrita não trouxe, porém, problema na interpretação gráfica.

Outra resposta, porém, dentro da faixa dos erros, disse que, na atividade 2, “Se o grau é ímpar, a função é crescente ou decrescente”(Aluno I, transcrição) e, na atividade 1, que “A concavidade é voltada para cima ou para baixo”(Aluno I, transcrição). Nota-se, aqui, que o educando misturou conceitos de funções polinomiais de grau 1 e 2 e tentou generalizar. Existe a possibilidade de que ele tenha entendido o conceito, mas a escrita está evidentemente errada e que os termos ‘concavidade’ e ‘crescente’ são inadequados.

Já os resultados das atividades 3, 4 e 5 foram satisfatórios. O índice de acertos, em cada uma delas, foi de 92%, 94% e 100%. A atividade 5 é considerada extremamente fácil, mesmo sem a construção do gráfico, pois a ideia de intersecção com o eixo das ordenadas sempre é remetida a x=0 desde o início dos trabalhos com funções.

A atividade 6 teve alto índice de aproveitamento com 94%, mas aqui um pequeno ruído de elaboração parecia formar-se. Um dos alunos registrou que: “A construção de mais de um gráfico, do mesmo plano cartesiano, atrapalha muito a visualização das raízes” (Aluno M, transcrição). Esta é uma das correções a ser feita para uma eventual posterior aplicação.

As atividades 7 e 8 foram com índices de respostas corretas inferiores, no que diz respeito à parte 6. Muitos alunos da atividade 7 responderam que ‘O gráfico corta o eixo x’, quando, na verdade, ele tangencia o eixo das abscissas. Retomando a construção, aplicou-se o termo correto, explicando que, quando a raiz tem multiplicidade par, o gráfico é tangenciado em suas raízes. Já na atividade 8 alguns alunos relataram que o gráfico ‘corta e tangencia o eixo x’ e outros que o gráfico ‘corta, tangenciando o eixo x’. É prudente pensar que, mesmo com a nomenclatura errada (já que não se pode cortar e tangenciar ao mesmo tempo), os educandos entenderam o formato da raiz de multiplicidade ímpar.

Pode-se dizer que, apesar de não existir 100% de acertos, a Hipótese 4 foi atingida, pois como afirmam Ponte, Brocardo e Oliveira (2005) "não se conseguindo resolver o problema, o trabalho não deixa de valer a pena pelas descobertas imprevistas que proporciona"(p.17).

Considerando-se também os objetivos deste trabalho, verifica-se que foi possível oferecer ao educando a possibilidade da investigação matemática no software GeoGebra em detrimento ao lápis e ao papel e que se consegue adaptar, de maneira satisfatória, a proposta de Dazzi para Construção de Polinômios, utilizando conceitos aprendidos pelos educandos.

Respondendo à questão norteadora, pode-se dizer que, baseado nas hipóteses e na sequência didática, pode-se trabalhar com investigação matemática para construção de gráficos polinomiais no GeoGebra, para que o educando possa visualizar os coeficientes algébricos em uma representação gráfica.

Pensando nas questões adicionais, acredita-se que a adaptação da sequência de Dazzi deu ao educando a possibilidade de investigar o gráfico, utilizando os conceitos de limites infinitos, o que não era previsto, desta maneira, na sequência de Dazzi. Isso faz pensar que toda sequência didática deve passar por uma adaptação, para melhor encaixe na realidade onde está inserida.

Finalmente, são reais as possibilidades facilitadoras da construção de gráficos de polinômios no GeoGebra. Não apenas na questão de tempo, mas na questão precisão dos gráficos. É possível que este trabalho levasse um tempo muito superior e talvez não tão preciso se fosse feito em papel. Ganha-se tempo e qualidade, utilizando-se o GeoGebra.

Uma outra hipótese possível é a de que outros softwares também facilitem o trabalho. O próprio Dazzi utilizou-se do Graphmatica e alguns educando, deste trabalho, relataram conhecer outros softwares de funções polinomiais. Ou seja, o trabalho com softwares para Polinômios facilita e auxilia a qualidade do trabalho do educador.

Referências

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: Contexto e Aplicações, v. 3. São Paulo: Ática, 2007.

DAZZI, Clóvis José. **Análise de gráficos de funções polinomiais de grau maior que dois com auxílio do software Graphmatica**. Lajeado: Centro Universitário Univates, 2011. 117p. Dissertação de Mestrado. Disponível em: <https://www.univates.br/bdu/bitstream/10737/219/1/ClovisDazzi.pdf>. Acesso em: 9 dez. 2015.

LISBOA Viviane de Jesus. Polinômios com Coeficientes da Sequência de Fibonacci **Revista Eletrônica do Colegiado de Matemática da UEFS**. Espírito Santo. Trabalhos de Orientação a Pesquisa. 2007. Disponível em: <http://www2.uefs.br/sigma/arquivos/COP/COP02-2008_Viviane_Lisboa.pdf>. Acesso em: 9 dez. 2015.

OLIVEIRA, Oswaldo Rio Branco de. **Teorema Fundamental da Álgebra**. Palestra proferida em novembro de 2011 (atualizada em setembro de 2015). São Paulo. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~oliveira/TFACOLEGIAL5.pdf>. Acesso em: 9 dez. 2015.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2005.